

Ασκήσεις

- 4) Θεωρούμε τα διανύσματα $u_1 = (1, 1, -1)$, $u_2 = (1, 2, -3)$ και $p = (2, 2, 2)$ του $\mathbb{R}^3$:
- Να δείχθει ότι τα u_1, u_2 είναι γρ. ανεξ. και ότι $p \notin \Pi$ όπου Π είναι το επίπεδο που ορίζουν τα u_1, u_2 .
 - Να βρούμε 2 διανύσματα a, b του $\mathbb{R}^3$ τ.ω να ισχύουν τα εξής : $a \in \Pi$, $b \in \Pi^\perp$, $a+b=p$.
 - Να υπολογιστεί η απόσταση του p από το Π .

Λύση

Για να δείξουμε ότι $p \notin \Pi$ αρκεί ν.δ.ο u_1, u_2, p Γ.Α.

$$\text{Αρκεί } D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow D = 10 - 8 + 2 = 4 \neq 0$$

Χρησιμοποιούμε την μέθοδο G-S. Ξεκινάμε από τα διανύσματα που έχουμε. Ορίζουμε τα διανύσματα

$$v_1 = u_1 = (1, 1, -1)$$

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1$$

$$v_3 = p - \frac{\langle p, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 - \frac{\langle p, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1$$

$$\langle v_2, v_1 \rangle = 6, \quad \langle v_2, v_2 \rangle = 3, \quad \langle v_1, v_2 \rangle = 0, \quad \langle v_2, v_2 \rangle = 2$$

$$\langle p, v_1 \rangle = 2, \quad \langle p, v_2 \rangle = 4$$

Οπότε $v_2 = (1, 2, -3) - \frac{6}{3} (1, 1, -1) = (-1, 0, -1)$

$$v_3 = (2, 2, 2) - \frac{-4}{2} (-1, 0, -1) - \frac{2}{3} (1, 1, -1) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Έχουμε: $\langle v_1, v_3 \rangle = 0 = \langle v_2, v_3 \rangle \Rightarrow$ Το v_3 είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα ~~v_1, v_2~~ v_1, v_2 δηλαδή το Π .

Άρα $v_3 \in \Pi^\perp$ ορίζουμε $a = p - v_3 = \frac{\langle p, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 + \frac{\langle p, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 \Rightarrow a \in \Pi$

Θέτουμε $b = p - a \Rightarrow p = a + b \Rightarrow b = v_3 \in \Pi^\perp, a \in \Pi, a \in \mathbb{E}$

είναι $\text{dist}(p, \Pi) = \|b\| = \|p_{\Pi^\perp}(p)\| = \sqrt{\frac{8}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$

Αν επιλεγούν έτσι $\mathbb{R}^2$: $b = v_2 \quad a = v_2 - v_3 = \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1$

γ) Θεωρούμε το σύνολο $A = \{(5-6\lambda, 7+8\lambda, 9+10\lambda)\}$. Ν.δ.ο. το A είναι μια ευθεία του $\mathbb{R}^3$ και να γραφεί στην μορφή $t_a(L)$ για κάποιο διάνυσμα $a \in \mathbb{R}^3$ και ευθεία L που διέρχεται από το 0

Λύση

Έστω $\lambda \in \mathbb{R} : (5-6\lambda, 7+8\lambda, 9+10\lambda) = \cancel{(5, 7, 9)} + \lambda(-6, 8, 10) =$
 $= \mathbb{E} \quad a + \lambda b \in t_a(L)$

Θέσω $a = (5, 7, 9)$ και $b = (-6, 8, 10)$ και ορίζουμε ευθεία
 $L = \{\lambda b, \lambda \in \mathbb{R}\}$

Άρα $A = t_a(L) \Rightarrow$ δείξατε ότι A είναι ευθεία του $\mathbb{R}^3$

2) Θεωρούμε ένα χώρο διανυσματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν 2 διανύσματα a και b του V τ.ω $\|a\|=7$ (4), $\|b\|=11$ (2), $\langle a, b \rangle = 13$ (3)

- Να δείχθεί ότι τα a, b είναι Γ.Α.
- Να υπολογιστεί το εσω. γινόμενο $\langle 5a+6b, -8a+b \rangle$
- Να δώσετε ένα παράδειγμα ενός χώρου $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ στον οποίο πράγματι υπάρχουν διανύσματα a, b που ικανοποιούν τα (4), (2), (3)

Λύση

i. Ισχυριζόμαστε την ανισότητα C-S $|\langle a, b \rangle| = \|a\| \cdot \|b\|$

$$\text{όπως } |\langle a, b \rangle| = 13 \text{ ενώ } \|a\| \cdot \|b\| = 7 \cdot 11 = 77$$

$$\text{Οπότε } |\langle a, b \rangle| \neq \|a\| \cdot \|b\| \Rightarrow a, b \text{ Γ.Α.}$$

ii Υπολογίζουμε $\langle 5a+6b, -8a+b \rangle = \langle 5a, -8a+b \rangle + \langle 6b, -8a+b \rangle =$

$$= \langle 5a, -8a \rangle + \langle 5a, b \rangle + \langle 6b, -8a \rangle + \langle 6b, b \rangle =$$

$$= 5(-8) \langle a, a \rangle + 5 \langle a, b \rangle + 6(-8) \langle b, a \rangle + 6 \langle b, b \rangle =$$

$$= -40 \|a\|^2 + 5 \langle a, b \rangle - 48 \langle a, b \rangle + 6 \|b\|^2 =$$

$$= -40 \|a\|^2 - 43 \langle a, b \rangle + 6 \|b\|^2 = -40 \cdot 49 - 43 \cdot 13 + 6 \cdot 121 = -1793$$

iii. Έστω ότι βρισκόμαστε στο $\mathbb{R}^2$. Θεωρώ $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$

$$\|a\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \quad \|b\| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}, \quad \langle a, b \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$\text{είναι: } \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = 7, \quad \sqrt{b_1^2 + b_2^2} = 11, \quad a_1 b_1 + a_2 b_2 = 13 \quad (3)$$

$$\text{Έστω ότι } a_2 = 0 \Rightarrow a_1 = 7$$

$$(3) \Rightarrow 7 b_1 = 13 \Rightarrow b_1 = \frac{13}{7}$$

$$b_1^2 + b_2^2 = 11^2 \Rightarrow \left(\frac{13}{7}\right)^2 + b_2^2 = 121 \Rightarrow b_2^2 = \frac{5760}{49} \Rightarrow b_2 = \sqrt{\frac{5760}{49}} = \frac{\sqrt{5760}}{7}$$

Είπω V να είναι ένας τυχαίος διαυλισμένος μπος με
εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ περσφαιένιας διάστασης. Να δείξει
ότι αν χωρίζουμε μόνο ένα περσφαιένιο πλήθος από τα
εσωτερικά γινόμενα κείνων διαυλισμών του, τότε μπορούμε να
υπολογίσουμε τα εσωτερικά γινόμενα οποιουδήποτε διαυλισμών του

How

Έστω $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ να είναι μια βάση του V ως υποδυναμική
σε συμπιγμένη τους αριθμούς $\langle u_i, u_j \rangle$ για $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$

Έστω $v, w \in V$, τυχαία. Τότε $\langle v, w \rangle = 1$ / θα τα γράψω σαν γρ. $\langle v, w \rangle = 1$ / αν διασπαστεί το u .

Es sei $V = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$ für $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

Sei $w = p_1 u_1 + p_2 u_2 + \dots + p_n u_n$ für $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{R}$

Given $\langle v, w \rangle = \langle \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n, \mu_1 u_1 + \dots + \mu_n u_n \rangle =$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^n A_i u_i, \sum_{j=1}^n B_j u_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_i B_j \langle u_i, u_j \rangle$$

9) Υπάρχει ένας τρόπος να συσχετίσουμε από εσωτερικό γινόμενο $\langle, \rangle$ ενός διανυσματικού χώρου πεπερασμένης διαστάσεως η με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^4$ έκτασης ω :

$$\langle (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{für } (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

luen

ΕΓΩ & ΣΥΝΤΑΞΗ Η ΜΕ 2.7

Θα πρέπει μια ορθοκανονική βάση $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ του V ως προς το εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (όχι το κανονικό)

Έστω $V = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$ και $W = \sum_{i=1}^n \mu_i u_i$. Έσο διανυσματα του V -3-

ως προς τη βάση $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$

$$\text{Έχουμε } \langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j \langle u_i, u_j \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i$$

$$\text{Όπως } \langle u_i, u_j \rangle = 0 \text{ αν } i \neq j$$

$$\langle u_i, u_j \rangle = 1 \quad \forall i=j$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$\Rightarrow \langle v, w \rangle = \lambda_1 \mu_1 + \dots + \lambda_n \mu_n = \langle (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \rangle_K$$

ε) Να αποδείξετε γεωμετρικά τα ερωτήματα: $\langle x, a \rangle = 0$ όπου a, b
 $\langle x, b \rangle = 0$

$$\|x\| = c$$

είναι 2 γρ. ανεξ. διανυσματα του $\mathbb{R}^3$, $c \neq 0, c > 0$

Λύση

$$\langle x, a \rangle = 0 \quad (1)$$

$$\langle x, b \rangle = 0 \quad (2)$$

$$\|x\| = c \quad (3)$$

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

• Αλγεβρική λύση

$$\text{Έστω } a = (a_1, a_2, a_3) \text{ και } b = (b_1, b_2, b_3)$$

Έστω $x = (x_1, x_2, x_3)$ να είναι για λύση του ερωτήματος

$$\text{Από την (1)} : a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0 \quad (4)$$

$$(2) : b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0 \quad (5)$$

$$(3) : \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = c \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = c^2 \quad (6)$$

$$\text{Έστω } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{Τότε } \begin{aligned} x_1 &= f_1(x_3) = Ax_3 + C \\ x_2 &= f_2(x_3) = Bx_3 + D \end{aligned}$$

Αντικαθιστώ τα x_1, x_2 στην (3) και παράγωμε μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς x_3

• Γεωμετρική λύση

$$T_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{με νόρ } T_1(x) = \langle x, a \rangle$$

$$T_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{με νόρ } T_2(x) = \langle x, b \rangle$$

Παρατηρώ ότι T_1, T_2 είναι γραμμικές

$$\text{Άρα } \{x: \langle x, a \rangle = 0\} = \{x: T_1(x) = 0\} = \ker T_1$$

$$\{x: \langle x, b \rangle = 0\} = \dots = \ker T_2$$

Όμως ο $\ker T_1$ και $\ker T_2$ είναι διανυσματικός χώρος.

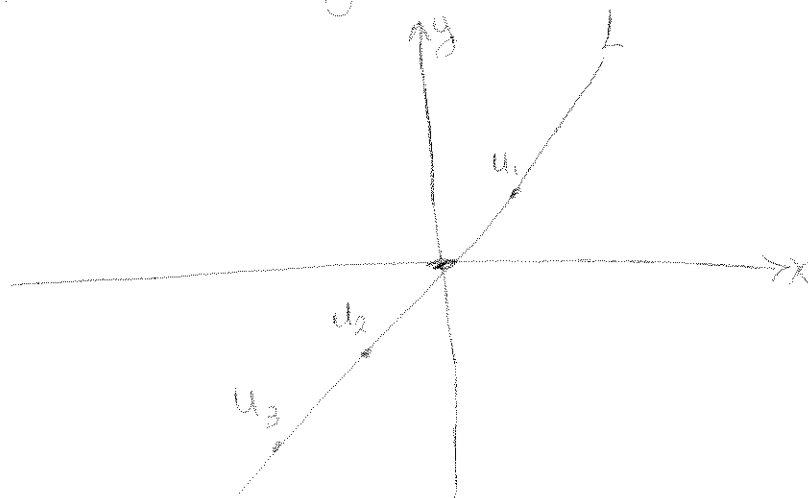
Επίσης είναι εύκολο να δείξεται από το 0, γιατί?

$$\{x: \langle x, a \rangle = 0\} = \{x: a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0\} = \Pi_1$$

$$\{x: \langle x, b \rangle = 0\} = \{x: b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0\} = \Pi_2$$

$$\text{Άρα το σύνολο } \{x \in \mathbb{R}^3: \langle x, a \rangle = \langle x, b \rangle = 0\} = \Pi_1 \cap \Pi_2 = L \text{ (ευθεία)}$$

$$\text{Θέλω } x \in L \text{ με } \|x\| = c$$



* 505 *

-4-

$$\left. \begin{array}{l} \text{Πάρνω κάποιο } x \text{ ώστε} \\ x \perp a \\ x \perp b \\ \|x\| = c \end{array} \right\} \begin{array}{l} (\{a, b\})^\perp = \Pi. \\ x \in \Pi^\perp = L \\ L = \{\lambda u_0, \lambda \in \mathbb{R}\}, u_0 \neq 0 \end{array}$$

$$\text{Πρέπει να έχω } \|\lambda u_0\| = c \Rightarrow |\lambda| = \frac{c}{\|u_0\|} \Rightarrow \lambda_{2,2} = \pm \frac{c}{\|u_0\|}$$

$$x = \frac{c}{\|u_0\|} u_0 \quad \text{ή} \quad x = -\frac{c}{\|u_0\|} u_0$$

Έχουμε a, b γρ. ανεξ. και πάρνω ένα 3° για να είναι και τα 3 γρ. ανεξ. Ένας εύκολος τρόπος είναι να πάρω ένα διάνυσμα που ανήκει στην βάση e_1, e_2, e_3 . Πάρνω ορίσεται και αν είναι $\neq 0$ τότε έχω το ζητούμενο.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$a = (a_1, a_2, a_3)$$

$$b = (b_1, b_2, b_3)$$

$$e_1 = (1, 0, 0)$$

$$\text{Κάνω G-S : } \begin{array}{l} v_1 = a \\ v_2 = b - \frac{\langle b, a \rangle}{\|a\|^2} a \end{array}$$

$$v_3 = e_1 - \frac{\langle e_1, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 - \frac{\langle e_1, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1$$

$$(\{v_1, v_2\})^\perp = \Pi = (\{a, b\})^\perp$$

$$v_3 \perp \Pi, v_3 \neq 0, v_3 \in \Pi^\perp$$

$$x = \lambda v_3 \Rightarrow \|x\| = \|\lambda v_3\| \Leftrightarrow c = |\lambda| \cdot \|v_3\| \Leftrightarrow |\lambda| = \frac{c}{\|v_3\|} \Rightarrow \lambda = \pm \frac{c}{\|v_3\|}$$

$$\text{Άρα } x = \frac{c}{\|v_3\|} v_3 \quad \text{ή} \quad x = -\frac{c}{\|v_3\|} v_3$$

7) (Γενική μορφή)

Έστω $a_1, a_2, \dots, a_n$ να είναι η γρ. ανεξάρτητα διανύσματα ενός διανυσματικού χώρου $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο διάστασης $n+1$. Να περιγραφεί πως δίνεται γεωμετρικά το σύνολο

$$\langle x, a_1 \rangle = 0 \quad (1)$$

$$\langle x, a_2 \rangle = 0 \quad (2)$$

$\vdots$

$$\langle x, a_n \rangle = 0 \quad (n)$$

$$\|x\| = c, \quad c > 0 \quad (n+1)$$

Λύση

Τα διανύσματα $a_1, a_2, \dots, a_n$ και ένα από τα διανύσματα

$e_1, e_2, \dots, e_{n+1}$ της βάσης του $\mathbb{R}^n$ είναι γρ. ανεξάρτητα.

Ας υποθέσουμε ότι τα $a_1, a_2, \dots, a_n$ είναι γρ. ανεξ. είναι G-S

και πάρουμε τα $v_1, v_2, \dots, v_{n+1}$ που αποτελούν ~~κανονική~~ ~~βασή~~

ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^{n+1}$ και ισχύει ότι $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

Από $v_{n+1} \perp v_i, \quad i=1, 2, \dots, n$ έπεται ότι είναι κάθετο με κάθε

διάνυσμα του Π άρα και με τα $a_i, \quad i=1, \dots, n$

Ανταδίδω το $\langle v_{n+1}, a_i \rangle = 0, \quad i=1, \dots, n$

Όπως το $\langle v_{n+1} \rangle$ είναι διάστασης 1

$\Pi^\perp$

Άρα αν υπάρχει x διάνυσμα του συνόλου $x \in \Pi^\perp$ για ένα διάνυσμα

κατανοεί ως $(2), (2), \dots, (n)$

Λητάδι $x \in \Pi^\perp = \langle r_{n+1} \rangle$ αρα $\exists \lambda \in \mathbb{R} : x = \lambda r_{n+1}$ ->-

Ζωτας από την ορίσωση $(n+1)$ ερωώουτε:

$$\|x\| = \|\lambda r_{n+1}\| \Leftrightarrow \cancel{c = |\lambda| \|r_{n+1}\|} \quad c = |\lambda| \|r_{n+1}\| \Leftrightarrow |\lambda| = \frac{c}{\|r_{n+1}\|}$$

$$\text{Άρα } x = \frac{c}{\|r_{n+1}\|} r_{n+1} \quad \text{ή} \quad x = - \frac{c}{\|r_{n+1}\|} r_{n+1}$$

